Roll No. .... Total No. of Pages : 10

Total No. of Questions : 23

उत्तरमध्यमा द्वितीयखण्ड वार्षिक परीक्षा 2022-23

विषय कोड : 1208

गणित

समय : 3 घण्टे **पूर्णांक : 100**

निर्देश : (*i*) सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है।

(*ii*) प्रश्न क्रमांक 1 से 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न में 8 वस्तुनिष्ठ, सत्य/असत्य, खाली स्थान, सही जोड़ी मिलाओ तथा एक शब्द/वाक्य में उत्तर देना है। प्रत्येक उपप्रश्न 1 अंक का है।

(*iii*) प्रश्न क्रमांक 6 से 15 तक प्रत्येक के 2 अंक हैं।

(*iv*) प्रश्न क्रमांक 16 से 19 तक प्रत्येक के 4 अंक हैं।

(*v*) प्रश्न क्रमांक 20 से 23 तक प्रत्येक के 6 अंक हैं।

1. सही विकल्प लिखिये : $8 \times 1 = 8$

(*i*) समुच्चय {1, 2, 3} में R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)} द्वारा प्रदत्त संबंध है :

(*a*) केवल सममित (*b*) केवल स्वतुल्य

(*c*) केवल संक्रामक (*d*) एकतुल्यता संबंध

(ii) यदि A एक वर्ग आव्यूह है तो A सममित आव्यूह होगा :

(a) $A^2 = A$ (b) $A^2 = I$

(c) $A^1 = A$ (d) $A^1 = -A$

(iii) यदि A, 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है तो $|kA|$ होगा :

(a) $k\,|A|$ (b) $k^2\,|A|$

(c) $k^3\,|A|$ (d) $3k\,|A|$

(iv) $\sin\theta + \cos\theta$ का उच्चिष्ठ मान है :

(a) $-\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{2}$

(c) 2 (d) -2

(v) अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x \sin x = 0$ की कोटि एवं घात होगी :

(a) 1, 2 (b) 2, 1

(c) 1, 3 (d) 3, 1

(vi) $\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k})$ का मान होगा :

(a) $\hat{k}$ (b) $\hat{i}$

(c) 1 (d) 0

(vii) x अक्ष की दिक् कोज्याएं हैं :

(a) (0, 0, 0) (b) (1, 0, 0)

(c) (0, 1, 0) (d) (0, 0, 1)

(viii) तीन सिक्के एक साथ उछालने पर घटना न्यूनतम दो चित्त प्राप्त करने की प्रायिकता होगी :

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{4}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{3}$

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये : 8×1=8

(i) समुच्चय A = {1, 2, 3} पर अधिकतम तुल्यता संबंधों की संख्या .... है।

(ii) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान .... है।

(iii) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$ का मान .... होगा।

(iv) $f(x) = \sin x$ से प्रदत्त फलन अन्तराल $\left(0, \pi/2\right)$ में .... है।

(v) यदि $\vec{a}$ व $\vec{b}$ परस्पर लम्बवत हों, तो $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .... है।

(vi) सदिश $2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ की दिक् कोज्या .... होगी।

(vii) यदि $P|A| = \frac{3}{5}$, $P|B| = \frac{1}{5}$ हो और A तथा B स्वतंत्र घटना हों, तो $P(A \cap B)$ का मान .... होगा।

(viii) यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं तो $P(A \cap B) =$ .... है।

3. सही जोड़ी मिलाइए : 7×1=7

'A'		'B'	
(i)	$\int \sec^2 x$	(a)	$-\cot x + C$
(ii)	$\int \text{cosec}^2 x$	(b)	$\sec x + C$
(iii)	$\int \sec x . \tan x \, dx$	(c)	$\tan x - x + C$
(iv)	$\int \text{cosec}\, x . \cot x \, dx$	(d)	$\log \sin x + C$
(v)	$\int \tan^2 x \, dx$	(e)	$\log \|\sec x\| + C$
(vi)	$\int \cos x \, dx$	(f)	$\tan x + C$
(vii)	$\int \tan x \, dx$	(g)	$-\text{cosec}\, x + C$
(viii)	$\int \cot x \, dx$	(h)	$\sin x + C$
		(i)	$-\cos x + C$

4. निम्नलिखित कथनों में सत्य व असत्य लिखिये : 8×1=8

(i) $f(x) = 8x$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ फलन, एकैकी तथा आच्छादक है।

(ii) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ का मुख्य मान $-\dfrac{\pi}{3}$ है।

(iii) $e^{3 \log x}$ का अवकलन गुणांक $3x^2$ है।

(iv) $x = 0, x = 2\pi$ के मध्य वक्र $y = \cos x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई है।

(v) अवकल समीकरण $x^2 \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x\dfrac{dy}{dx} + y = x$ की कोटि 2 व घात 1 है।

(*vi*) बिन्दु (1, 0, 2) की x अक्ष से दूरी 1 है।

(*vii*) घन के विकर्णों के बीच का कोण $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ होता है।

(*viii*) यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हों तो $P(A \cup B) = P(A).\ P(B)$ होगा।

5. निम्नलिखित का एक शब्द/वाक्य में उत्तर लिखिये : 8×1=8

(*i*) फलन $f(x) = 2x$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : N \to N$ एकैकी क्यों कहलाता है ?

(*ii*) तत्समक आव्यूह को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिये।

(*iii*) $\sin 8x$ का अवकल गुणांक क्या होगा ?

(*iv*) $\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx$ का मान क्या है ?

(*v*) यदि $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 4$ तथा $\vec{a} . \vec{b} = 6$ तो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण क्या होगा ?

(*vi*) दो बिन्दुओं (–2, 4, –5) और (1, 2, 3) को मिलाने वाली रेखा का दिक् अनुपात लिखिये।

(*vii*) उद्देश्य फलन के अधिकतम या न्यूनतम मान को क्या कहते हैं ?

(*viii*) यदि $P(A) = 2$, $P(A \cap B) = 1$ तब $P\left(B/A\right)$ का मान क्या होगा ?

6. सिद्ध कीजिये कि $f(x) = 2x$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : N \rightarrow N$ एकैकी है परंतु अच्छादक नहीं है। 2

अथवा

यदि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ तथा $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ A से B पर एक फलन है तो दिखाइये कि f एकैकी है।

7. समीकरण $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ से x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिये। 2

अथवा

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो $2A - B$ का मान ज्ञात कीजिये।

8. फलन $\log x$ का द्वितीय कोटि का अवकलन ज्ञात कीजिये। 2

अथवा

$f(x) = \sin x^2$ का अवकलन ज्ञात कीजिये।

9. सिद्ध कीजिये R पर $f(x) = 3x + 17$ से प्रदत्त फलन वर्धमान है। 2

अथवा

वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिये जबकि $r = 4$ cm है।

10. $\int \frac{\log x}{x} dx$ का मान ज्ञात कीजिये। 2

अथवा

$\int \sin^2 x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिये।

अथवा

सिद्ध कीजिये :

$$\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{13}=\tan^{-1}\frac{2}{9}$$

17. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ एवं $A^2 = kA - 2I$ हो, तो k का मान ज्ञात कीजिये। 4

अथवा

यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ हो, तो $\frac{(A + A')}{2}$ ज्ञात कीजिये।

18. $f(x) = x^3 - 3x + 3$ द्वारा प्रदत्त फलन के लिए स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम के सभी बिन्दुओं को ज्ञात कीजिये तथा मान भी ज्ञात कीजिये। 4

अथवा

ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिये जिनका योग 24 है और जिनका गुणनफल उच्चतम हो।

19. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = 3x + 4y$ का अधिकतमीकरण ज्ञात कीजिये : 4

$$x + y \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

अथवा

निम्न अवरोधों के अंतर्गत $z = 3x + 5y$ का न्यूनतमीकरण कीजिये :

$$x + 3y \geq 3,\ x + y \geq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

11. मान ज्ञात कीजिये : 2

$$\int \frac{2+3\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिये :

$$\int \left(4e^{4x}+1\right) dx$$

12. सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिये। 2

अथवा

दर्शाइये कि सदिश $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ और $-4\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$ संरेख है।

13. एक रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिये जो निर्देशांकों के साथ समान कोण बनाती है। 2

अथवा

बिन्दु (5, 2, –4) से जाने वाली तथा सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ को समानान्तर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिये।

14. दिखाइये कि रेखाएँ $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ और $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ परस्पर लम्बवत हैं। 2

अथवा

रेखाओं $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ और $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिये।

15. यदि $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ और A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो $P(A \cap B)$ की गणना कीजिये। 2

अथवा

यदि $P(A) = \frac{7}{13}$, $P(B) = \frac{9}{13}$ और $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$ हों, तो $P\left(\frac{A}{B}\right)$ ज्ञात कीजिये।

16. मान ज्ञात कीजिये : 4

$$\tan^{-1}\left\{2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right\}$$

20. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिये : 6

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b), (b-c), (c-a)$$

अथवा

दर्शाइये कि बिन्दु A(a, $b + c$), B(b; $c + a$) और C(c, $a + b$) सरेख हैं।

21. k का मान ज्ञात कीजिये ताकि प्रदत्त फलन दिये बिन्दु पर सतत् है : 6

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k\cos x}{\pi - 2x} & \text{यदि } x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ 3 & \text{यदि } x = \dfrac{\pi}{2} \text{ परिभाषित हो} \end{cases}$$

अथवा

k का मान ज्ञात कीजिये यदि फलन :

$$f(x) = \begin{cases} kx + 1 & \text{यदि } x \leq \pi \\ \cos x & \text{यदि } x > \pi \end{cases}$$

बिन्दु $x = \pi$ पर सतत् हो।

22. वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ के एक चतुर्थांश का क्षेत्रफल समाकलन विधि से ज्ञात कीजिये। 6

अथवा

दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल समाकलन विधि से ज्ञात कीजिये।

23. अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx}+2y=x^2$ $(y \neq 0)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिये। 6

अथवा

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{2-y}$ $(y \neq 0)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिये।