

उत्तर प्रदेश विधानसभा (12वीं) वार्षिक परीक्षा-२०१६

विषय कोड : 1208

गणित

समय : 3 घण्टे

पूर्णांक : 100

आरंभ 3 घण्टे
कुल पृष्ठों की संख्या : 27

✓

ક્રમ સહી વિચલય

(i) (C) $(6, 8) \in \mathbb{R}$

(ii) (C) $m = n$

(iii) (B) $\frac{2\pi}{3}$

(iv) (B) 12π

(v) (D) પરીનામિત નથી

(vi) (D) $a = \frac{1}{11}$

(vii) (A) 1, 0, 0

(viii) (B) $\frac{4}{9}$

ક્રમ સ્વતંત્ર સ્વાતંત્ર

(i) સંજ્ઞામુક્ત

(ii) $\frac{2\pi}{4}$

(iii) 1

(iv) $f'(x) \geq 0$

(v) 9

(vi) 7

(vii) $P(B)$

(viii) સ્વતંત્ર

ક્ર. ૩

સાધી જોડી

સરોતજ - કા

સરોતજ - કા

(i) $\int \cos x dx$

(g) $\sin x + C$

(ii) $\int \frac{1}{x} dx$

(a) $\log x + C$

(iii) $\int e^x dx$

(b) $e^x + C$

(iv) $\int \cot x dx$

(c) $\log \sin x + C$

(v) $\int \sin x dx$

(d) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$

(vi) $\int \sec^2 x dx$

(e) $\tan x + C$

(vii) $\int \sec x dx$

(h) $\log(\sec x - \tan x) + C$

(viii) $\int \sec x \cot x dx$

(i) $-\sec x + C$

ક્ર. ૪. સમ / અસમ

(i) સમ

(ii) અસમ

(iii) અસમ

(iv) અસમ

(v) સમ

(vi) સમ

(vii) અસમ

(viii) અસમ

उ० 5. एक शब्द / वाक्य में उत्तर

(i) हाँ

(ii) 3X1

(iii) $\frac{-\sin x}{2\cos x}$

(iv) 0

(v) हाँ

(vi) शून्य (0)

(vii) एक वैश्विक योगात्मक समस्या वह समस्या है जो कि x और y जैसे कुछ अनेक चरों के एक वैश्विक सलन का अधिकतम या न्यूनतम मान प्राप्त करने से संबंधित है।

(viii) 0.72.

उ० 6. क्योंकि $f(-1) = 1 = f(1)$ इसलिए f एकैकी नहीं है। पुनः सहाय्य R का अवयव -2 और R के किसी भी अवयव x का प्रतिबिम्ब नहीं है। अतः f आच्छादक नहीं है।

अथवा

$$f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}, \quad f: R \rightarrow R$$

$$f \circ f(x) = f[f(x)]$$

$$= f\left[(3 - x^3)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$= \left[3 - \left\{(3 - x^3)^{\frac{1}{3}}\right\}^3\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= [3 - (3 - x^3)]^{\frac{1}{3}}$$

2

1

$$= [3 - 3 + x^3]^{\frac{1}{3}}$$

$$= (x^3)^{\frac{1}{3}}$$

$$= x$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \end{array}$$

उ०७. $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = \frac{i}{j}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

अथ $a_{11} = \frac{1}{1} = 1$

$$a_{12} = \frac{1}{2}$$

$$a_{21} = \frac{2}{1} = 2$$

$$a_{22} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{उ०११/}$$

$$2A - B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(5)

A

Date:

Page:

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-3 & 4+1 & 6-3 \\ 4+1 & 6-0 & 2-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

~~~~~

~~~~~

38.

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos^2 \theta - (-\sin^2 \theta)$$

$$= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$= 1$$

अथवा

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 3A = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |3A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 72 = -54$$

~~~~~

6

A

Date :

Page :

Sol,

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 3(0+5) + 1(0+3) - 2(0-0)$$

$$= 3 \times 5 + 1 \times 3 - 2 \times 0$$

$$= 15 + 3 - 0$$

$$= 18$$

अथ

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$$

$$2-20 = 2x^2-24$$

$$-18 = 2x^2-24$$

$$2x^2-24 = -18$$

$$2x^2 = -18+24$$

$$2x^2 = 6$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

✓

ଉତ୍ତର

ଉଦାହରଣ:  $(3, 8), (-4, 2)$  ଓ  $(5, 1)$  ଦ୍ୱାରା ନିର୍ମିତ  
କରାଯାଇଛି

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} [3(2-1) - 8(-4-5) + 1(-4-10)]$$

$$= \frac{1}{2} [3 \times 1 - 8 \times (-9) + 1 \times (-14)]$$

$$= \frac{1}{2} [3 + 72 - 14]$$

$$= \frac{1}{2} \times 61$$

$$= \frac{61}{2} \text{ ବର୍ଗ ଏକକ}$$

ଉତ୍ତର

ଉତ୍ତର

$$A_{11} = 4$$

$$A_{12} = -1$$

$$A_{21} = -3$$

$$A_{22} = 2$$

$$\text{ଅର୍ଥାତ୍ } A \text{ କି ଅନୁପ୍ରାସନ} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(8)

A

Date :

Page :

उदा.  $f(x) = 2x+3$   $x=1$  पर सतत है।  
 फलन  $f(x)$ ,  $x=1$  पर परिभाषित है और  
 इसका मान 5 है,

अतः

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x+3) = 2 \times 1 + 3 = 2+3 = 5$$

अतः  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5 = f(1)$

अतः  $x=1$  पर  $f$  सतत है।

उदाहरण

$$y = \sin(\cos(x^2))$$

$x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[\sin(\cos(x^2))]}{dx}$$

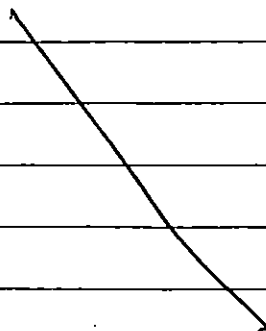
$$= \cos(\cos(x^2)) \frac{d[\cos(x^2)]}{dx}$$

$$= \cos(\cos(x^2)) \cdot [-\sin(x^2)] \cdot \frac{d}{dx} x^2$$

$$= \cos(\cos(x^2)) \cdot [-\sin(x^2)] \cdot 2x$$

$$= -2x \cos(\cos(x^2)) \cdot \sin(x^2)$$

— x — x — x —



9

A

Date :

Page :

Q12

$$\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{4 + 9 + 1}$$

$$= \sqrt{14}$$

$$\text{अतः } \hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$= \frac{2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{14}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{k}$$

अथवा,

$$\vec{a} = 5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$$

$$\therefore \vec{a} + \vec{b} = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$$

और

$$\vec{a} - \vec{b} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$$

अथ

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 6 \times 4 + 2 \times (-4) - 8 \times 2$$

$$= 24 - 8 - 16$$

$$= 24 - 24$$

$$\text{अतः } \vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b} \text{ परस्पर लंब हैं।}$$

✓

उ० 13

$$\frac{1-x}{3} = \frac{7x-14}{2p} = \frac{8-3}{2}$$

अथ

$$\frac{7-7x}{3p} = \frac{x-5}{1} = \frac{6-3}{5}$$

$$\text{अथ } \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{\frac{2p}{7}} = \frac{3-3}{2}$$

$$\text{अथ } \frac{x-1}{-3p} = \frac{x-5}{1} = \frac{3-6}{-5}$$

उ० 13 देखाई लम्बवत् है, अथ,

$$-3 \times \left( \frac{-3p}{7} \right) + \frac{2p}{7} \times 1 + 2 \times (-5) = 0$$

$$\frac{9p}{7} + \frac{2p}{7} - 10 = 0$$

$$\frac{9p + 2p}{7} - 10 = 0$$

$$\frac{11p}{7} - 10 = 0$$

$$\frac{11p}{7} = 10$$

$$11p = 10 \times 7$$

$$p = \frac{70}{11}$$

अथ 91

(11)

A

Date :

Page :

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$$

और

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{2}$$

क्यों मध्य कोण और Q के न

$$\cos Q = \frac{3 \times 1 + 5 \times 1 + 4 \times 2}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}}$$

$$\cos Q = \frac{3+5+8}{\sqrt{9+25+16} \cdot \sqrt{1+1+4}}$$

$$\cos Q = \frac{16}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{6}}$$

$$\cos Q = \frac{16}{\sqrt{2 \times 5 \times 5 \times 2 \times 3}}$$

$$\cos Q = \frac{16}{2 \times 5 \sqrt{3}}$$

$$\cos Q = \frac{8}{5\sqrt{3}}$$

$$Q = \cos^{-1}\left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right)$$

4

उदा० 4 दी हुई रेखा का कार्तीय समीकरण है:

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+6}{3}$$

यहाँ  $\vec{r} = -3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$

तथा  $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$

अतः दी हुई रेखा का सदिश समीकरण है:

$$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = -3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k} + t(2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k})$$

अथवा,

माना कि रेखा निदेशांशों के साथ  $\alpha, \alpha$ , और  $\alpha$  कोण बनाती है,

अतः

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$3\cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

अतः अभीष्ट दिक् - कोसाइन होंगी:

$$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

✓

उ० 15. मान लीजिए कि A घटना निकाले गए कार्ड पर संख्या है और B घटना निकाले गए कार्ड पर संख्या उसे बड़ी है को निरूपित करते हैं। हमें  $P(A|B)$  ज्ञात करना है।

यहाँ  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$   
तब

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

और  $A \cap B = \{4, 6, 8, 10\}$

इसलिए  $P(A) = \frac{5}{10}$

$$P(B) = \frac{7}{10}$$

और  $P(A \cap B) = \frac{4}{10}$

तब  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$= \frac{\frac{4}{10}}{\frac{7}{10}}$$

$$= \frac{4}{7}$$

अतः

$$P(A) = \frac{5}{10}$$

$$P(B) = \frac{7}{10}$$

(14)

A

Date :

Page :

उप 13. A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं  
अतः

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{3}{25}$$

उप 16.

$$Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2X + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2X = \begin{bmatrix} 1-3 & 0-2 \\ -3-1 & 2-4 \end{bmatrix}$$

$$2X = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

31491

$$A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ans: } A = (A')' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

319

$$A + 2B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ans: } (A + 2B)' = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

30/12.

संक्षेप

$$f(x) = \begin{cases} ax+1, & \text{यदि } x \leq 3 \\ bx+3, & \text{यदि } x > 3 \end{cases}$$

हमारे परिभाषित फलन  $x=3$  पर संतत है,  
अतः

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} (ax+1) = \lim_{x \rightarrow 3} (bx+3) = 3a+1$$

$$\Rightarrow 3a+1 = 3b+3 = 3a+1$$

$$\Rightarrow 3a+1 = 3b+3$$

$$\Rightarrow 3a-3b = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{3} = \frac{2}{3}$$

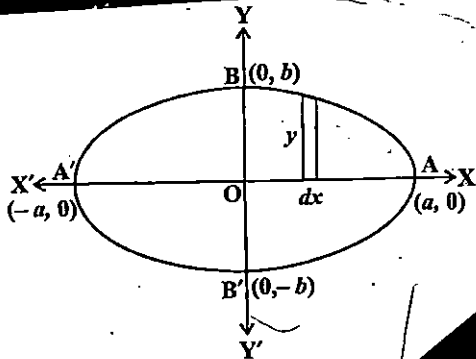
यही अभीष्ट संबंध है,

अथवा

$$x + \sin x = \cos x$$

इसे सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dx} + \frac{d \sin x}{dx} = \frac{d \cos x}{dx}$$



\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

$$\frac{dx}{dn} + \cos x \cdot \frac{dx}{dn} = -\sin x$$

$$(1 + \cos x) \cdot \frac{dx}{dn} = -\sin x$$

$$\frac{dx}{dn} = \frac{-\sin x}{1 + \cos x}$$

Q 18

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

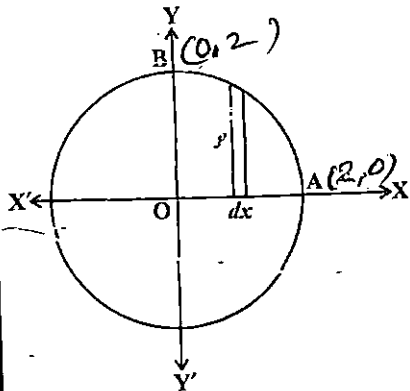
$$= \frac{4b}{a} \left[ \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} \right]_0^a$$

$$= \frac{4b}{a} \left[ \left( \frac{a}{2} \times 0 + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} 1 \right) - 0 \right]$$

$$= \frac{4b}{a} \times \frac{a^2}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \pi a b \quad \text{वर्ग इकाई}$$

✓



अथवा

वृत्त का समीकरण है:

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2^2 - x^2}$$

अतः अत्रील क्षेत्रफल

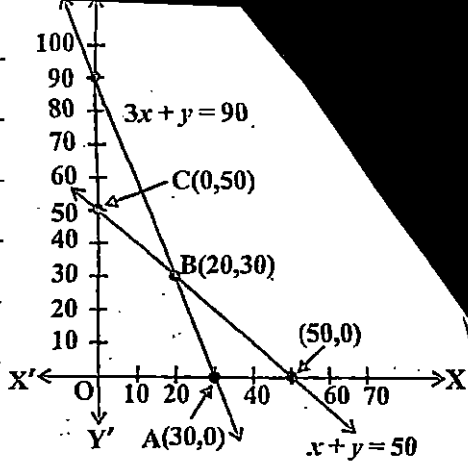
$$= 4 \int_0^2 \sqrt{2^2 - x^2} \, dx$$

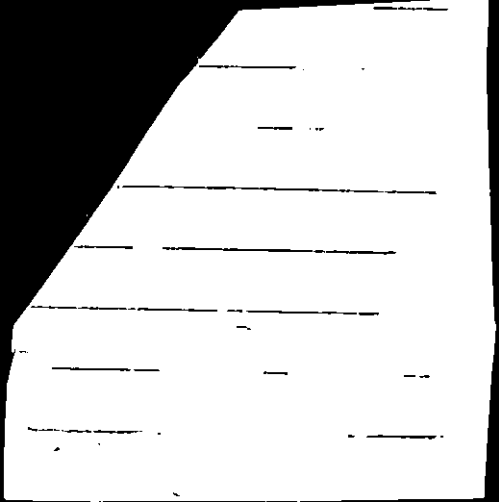
$$= 4 \left[ \frac{x \sqrt{2^2 - x^2}}{2} + \frac{2^2 \sin^{-1} \frac{x}{2}}{2} \right]_0^2$$

$$= 4 \left[ \frac{2 \sqrt{2^2 - 2^2}}{2} + 2 \sin^{-1}(1) - 0 - 0 \right]$$

$$= 4 \times 2 \times \frac{\pi}{2} = 4\pi \text{ वर्ग इकाई}$$

✓





उ०: 19

समस्या है

$$x + y \leq 50 \quad \text{--- (1)}$$

$$3x + y \leq 90 \quad \text{--- (2)}$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \text{--- (3)}$$

अंतर्गत

$Z = 4x + y$  का अधिकतम मान ज्ञात करना है।

अक्षर :

सुसंगत क्षेत्र OABC परिबद्ध है।

कोनीय बिन्दु

$Z$  के क्षेत्र मान

(0, 0)

0

(30, 0)

120

← अधिकतम

(20, 30)

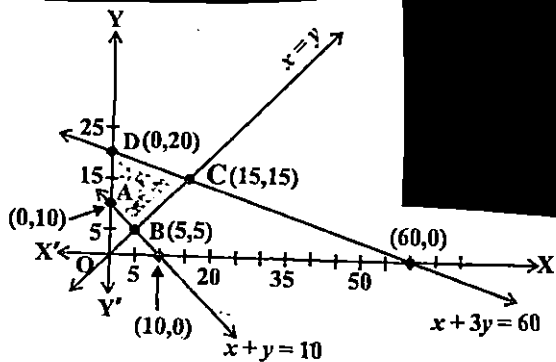
110

(0, 50)

50

अतः बिन्दु (30, 0) पर  $Z$  का अधिकतम मान 120 है।

✓



\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

1 -

\_\_\_\_\_

अथवा

व्यक्तियों

$$x + 3y \leq 60$$

$$x + y \geq 10$$

$$x \leq y$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

के अंतर्गत  $Z = 3x + 9y$  का न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात करना है।  
सुसंगत क्षेत्र के लिए व्यक्तियों को आलेखित करने पर

सुसंगत क्षेत्र ABCD परिकल्पित है।  
कोणीय बिन्दु Z के संगत मान

$$A(0,10) \quad 90$$

$$B(5,5) \quad 60 \leftarrow \text{न्यूनतम}$$

$$C(15,15) \quad 180$$

$$D(0,20) \quad 180 \leftarrow \text{अधिकतम}$$

बिन्दु B पर Z का न्यूनतम मान 60 है।  
तब, बिन्दुओं C और D पर Z का अधिकतम मान 180 है।

Q. 20.

$$\tan^{-1} \left( \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left[ \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{1 - \cos(\frac{\pi}{2} - x)} \right]$$

$$= \tan^{-1} \left[ \frac{\sin(\frac{\pi - 2x}{2})}{1 - \cos(\frac{\pi - 2x}{2})} \right]$$

$$= \tan^{-1} \left[ \frac{2 \sin(\frac{\pi - 2x}{4}) \cos(\frac{\pi - 2x}{4})}{2 \sin^2(\frac{\pi - 2x}{4})} \right]$$

$$= \tan^{-1} \left[ \cot \left( \frac{\pi - 2x}{4} \right) \right]$$

$$= \tan^{-1} \left[ \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - 2x}{4} \right) \right]$$

$$= \tan^{-1} \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$$

31/09/

✓

Step 1

$$\text{Let } x = \tan \theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1} x$$

$$\frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}}{x} = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1+\tan^2 \theta} - 1}{\tan \theta} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left( \frac{\sec \theta - 1}{\tan \theta} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left( \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left( \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left( \tan \frac{\theta}{2} \right)$$

$$= \frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \tan^{-1} x$$

Q.E.D.

✓

उदा१।

माना है कि

$$f(x) = \sin x + \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x$$

$$\text{अब } f'(x) = 0 \text{ से}$$

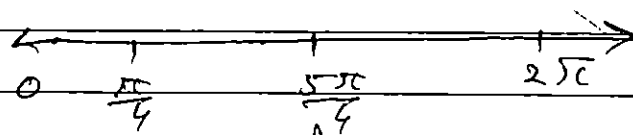
$$\cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}; \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

चिन्ह  $x = \frac{\pi}{4}$  और  $x = \frac{5\pi}{4}$  अंतराल

$[0, 2\pi]$  को तीन असंयुक्त अंतरालों

$$\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \text{ और } \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$$

में विभक्त करते हैं।



$$\therefore f'(x) > 0 \text{ यदि } x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$$

$$\text{अतः अंतरालों } \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \text{ और } \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$$

में फलन  $f$  निरंतर वृद्धमान है।

$$\text{और } f'(x) < 0, \text{ यदि } x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$\text{अतः } f \text{ अंतराल } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \text{ में निरंतर}$$

ह्रासमान है।

✓

अथवा,  
निम्न र वाले वृत्त का क्षेत्रफल

$$A = \pi r^2$$

$$\therefore \frac{dA}{dt} = \frac{d(\pi r^2)}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = 4 \text{ cm}, \quad r = 10 \text{ cm}$$

अतः

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \times 10 \times 4 = 80\pi$$

अतः जब  $r = 10 \text{ cm}$  तब वृत्त के क्षेत्रफल का क्षेत्रफल  $80\pi \text{ cm}^2/\text{s}$  की दर से बढ़ रहा है।

— x — x —  
— x — x —

उ० 22

$$I = \int \frac{x^3 \sin(\tan^{-1} x)}{1+x^8} dx$$

$$\text{माना } \tan^{-1} x = t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^8} \cdot x^4 dx = dt$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 dx}{1+x^8} = \frac{1}{4} dt$$

$$\therefore I = \frac{1}{4} \int \sin t dt$$

✓

$$= \frac{1}{4} (-\cos t) + C$$

$$= -\frac{\cos t}{4} + C$$

$$= -\frac{\cos(\tan^{-1} x)}{4} + C$$

अथवा

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$$

$$\text{अथ} \quad x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 - 1 + 2 \\ = (x+1)^2 + 1^2$$

$$\text{अथ} \quad I = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + 1^2}} dx$$

$$= \log \left[ (x+1) + \sqrt{(x+1)^2 + 1^2} \right] + C$$

$$= \log \left[ x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} \right] + C$$

✓

Q. 23,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$\Rightarrow dy = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx$$

समीकरण को हल करने पर

$$\int dy = \int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx + C$$

$$y = \int \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx + C$$

$$\Rightarrow y = \int \tan^2 \frac{x}{2} dx + C$$

$$\Rightarrow y = \int (\sec^2 \frac{x}{2} - 1) dx + C$$

$$\Rightarrow y = \tan \frac{x}{2} - x + C$$

$$\Rightarrow y = 2 \tan \frac{x}{2} - x + C$$

यही अभीष्ट व्यापक हल है।

अथवा

✓

$$y dx - (x + 2y^2) dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 2y$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} + P x = Q$$

जहाँ  $P = -\frac{1}{y}$  वहाँ  $Q = 2y$

$$\therefore \text{I.F} = e^{\int -\frac{1}{y} dy} = e^{-\log y} = \frac{1}{y}$$

अतः  $\frac{1}{y}$  गुण अवकल समीकरण का

एक हल है

$$x \cdot e^{\int P dy} = C + \int Q \cdot e^{\int P dy} dy$$

$$\Rightarrow x \times \frac{1}{y} = C + \int 2y \cdot \frac{1}{y} dy$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = C + \int 2 dy$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = C + 2y$$

$$\Rightarrow x = Cy + 2y^2$$

✓